

## Seria 9

---

### Zadanie 1

Zastosuj zasadę Jacobiego do wyznaczenia toru cząstki w tzw. „rzucie ukośnym” w jednorodnym polu grawitacyjnym.

### Zadanie 2

Korzystając z zasady Jacobiego w mechanice nierelatywistycznej, wyznacz tor cząstki w polu grawitacyjnym o energii potencjalnej  $GMm/r$ . W szczególności, dla cząstki o energii  $E = mv_\infty^2$  (oznacza to iż w nieskończoności cząstka leciała z prędkością  $v_\infty$ ), wyznacz kąt odchylenia dla toru „muskającego” powierzchnię ciała o promieniu  $R$ . Masa ciała wytwarzającego pole grawitacyjne wynosi  $M$ .

### Zadanie 3

Badając orbity w polu grawitacyjnym (zgodnie z OTW) wygodnie jest, zamiast zmiennej  $r$ , wprowadzić nową zmienną  $\rho$ , według równania:

$$r = r_0 + \frac{(\rho - \frac{r_0}{4})^2}{\rho} = \frac{(\rho + \frac{r_0}{4})^2}{\rho}$$

Prowadzi to do zmiany postaci metryki:

$$ds^2 = \frac{(\rho + \frac{r_0}{4})^2}{(\rho - \frac{r_0}{4})^2} dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{(\rho + \frac{r_0}{4})^2}{\rho^4} (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2) \quad (\text{przelicz}).$$

Inne jest  $g_{00}$  i inny element długości łuku w przestrzeni trójwymiarowej.

Korzystając z wyniku uzyskanego na ćwiczeniach dla ogólnej postaci lagranżianu w statycznym polu grawitacyjnym:

$$\int L dt = -mc^2 \int \sqrt{g_{00} dt^2 - \frac{1}{c^2} g_{ij} dq^i dq^j}$$

wypisz zasadę Jacobiego dla toru cząstki w polu centralno symetrycznym z użyciem współrzędnej  $\rho$ , w szczególności dla fotonu (masa 0).

Wypisz też zasadę Jacobiego fizyki **nierelatywistycznej** dla toru w polu grawitacyjnym **Newtona**, dla nadlatującej cząstki o prędkości jaką miała w nieskoń-

czoności równej  $c$ , "udając Greka" i nie przejmując się, że to za duża prędkość jak na fizykę nierelatywistyczną. Przyjmując, że pole grawitacyjne jest słabe i

że w zasadzie relatywistycznej można zastąpić  $\frac{(\rho + \frac{r_0}{4})^2}{(\rho - \frac{r_0}{4})^2}$  przez  $\sqrt{1 + 2r_0/\rho}$ , na-

wet dla najmniejszej dopuszczalnej wartości  $\rho$ , równej promieniowi Słońca, wykaż, że odchylenie promienia światła przez Słońce, według teorii Einsteina, jest **dwa razy większe**, niż by to mógł wyliczyć Newton w swej korpuskularnej teorii światła, czyli tak jak w **Zadaniu 1**. Oblicz to odchylenie w sugerowanym przybliżeniu.

### Zadanie 4

Korzystając z zasady Jacobiego dla toru w Ogólnej Teorii Względności wyznacz promień okręgu po którym poruszać się może foton. (Jest to orbita niestabilna – najmniejszy błąd w kierunku wystrzelonego fotonu, spowoduje, że będzie on poruszał się po spirali, zbliżając do centrum, gdy kąt prędkości względem promienia jest mniejszy od  $90^\circ$ , a oddalając, gdy kąt przekracza  $90^\circ$ ). Zadanie możesz rozwiązać używając albo współrzędnej  $r$ , albo  $\rho$  (wprowadzonej w zadaniu 3). W każdym przypadku wyznacz odległość **rzeczywistą** owej orbity od horyzontu.

### Zadanie 5

Rozwiąż równanie Hamiltona Jacobiego dla cząstki w jednorodnym polu magnetycznym. Wyznacz tor i ruch cząstki.

### Zadanie 6

Korzystając z postaci hamiltonianu wyznaczonej w zadaniu 3 w serii 8 napisz i rozwiąż równanie Hamiltona Jacobiego dla cząstki w polu Schwarzschilda. Przyprowadzając pochodną funkcji  $S$  po  $p_\varphi$  do stałej uzyskasz równanie toru. Porównaj z równaniem uzyskanym z zasady Jacobiego (przy użyciu tych samych współrzędnych, tj.  $r$  a nie  $\rho$ ).